

# 単純な離散的モデルによるチューリング・パターン再現の試み

## —物質濃度の波が決定する生物の模様—

高校 2 年 三田村 大凱

### 1. はじめに

自然界において、キリンやシマウマやチーター、さらにはサバやテナトウムシなどの様々な生物に多種多様なパターンの「模様」を見出すことができる。体表の模様は生物の外見に大きく影響し、環境に溶け込み捕食者による発見を防ぐカムフラージュ効果や、逆に自身を目立たせ交配相手の気を引く効果などを持つこともある。しかし、生物ごとに異なったパターンを示すこれらの模様は各々の生物に特異的な様式で形成されるものなのだろうか。また DNA の遺伝情報が細胞で発現する色素と細胞の場所を全て指定しており、それによって生物の模様が現れるのだろうか。

本稿では、生物の模様を理論的に説明したチューリング・パターンの理論及び前述の問いにチューリング・パターンを用いて明快な答えを与えた近藤滋先生らの研究について記し、さらに自作のプログラムを用いてどこまでチューリング・パターンを再現できるか試みた結果を示す。

### 2. チューリング・パターンについて

チューリング・パターンは、1952年にイギリスの数学者 Alan Turing によって存在が示された、連立偏微分方程式の解として与えられる物質濃度分布のパターンである。Turing は第 2 次世界大戦中にエニグマの解読にも貢献した数学者・計算機科学者である。彼は次に示す 2 成分の反応拡散方程式について重要な事実を示した。

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = f(u, v) + D_u \nabla^2 u(\mathbf{r}, t)$$

$$\frac{\partial v(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = g(u, v) + D_v \nabla^2 v(\mathbf{r}, t)$$

ここで、 $u, v$  は 2 種類の物質の濃度 ( $\mathbf{r}, t$  の関数) を、 $f, g$  はそれぞれ 2 物質の反応に依る  $u, v$  の変化量 ( $u, v$  の関数) を、 $D_u, D_v$  は 2 物質の拡散係数を、 $\mathbf{r}$  は座標を示す。2 式の左辺は各物質濃度の時間当たり変化量を表し、右辺第 1 項は反応項を、第 2 項は拡散項を表す。チューリングはこれらの方程式において、拡散係数の比が十分大きく、 $f, g$  がある一定の条件を満たすときに空間的に非一様な周期解が安定に存在することを示した。即ち、2 物質が条件を満たしながら互いの合成を調節しあうとき、物質濃度が濃い部分と薄い部分の繰り返しパターンが空間に形成され安定する

ことが証明されたのである。

チューリングのモデルでは 2 種類の物質 P と S について、P は P 自身及び S の合成を促進するが S は P の合成を抑制するというネットワークが考えられており、これは正のフィードバックと負のフィードバックが組み合わさった形になっている。さらにモデルでは、促進物質 P の拡散速度は抑制物質 S の拡散速度より遅いことが仮定されている。このようなモデルの下で物質濃度の波ができることは、次のような簡単な説明でイメージすることができるだろう (Fig. 1)。

ある瞬間において、ある点 X で [P] (=P の濃度) が少し高まったときを考える。P は自身の合成を促進するため [P] の X におけるピークは

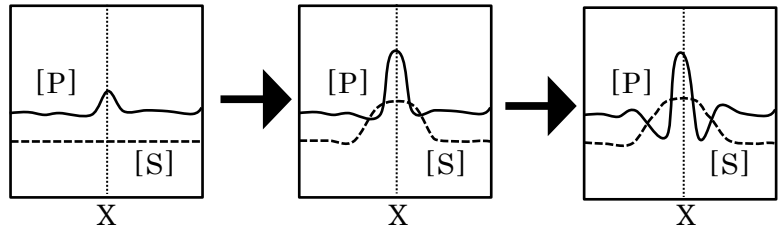


Fig. 1: [P] と [S] の時間変化，実線と破線はそれぞれ [P] と [S] を表し、波の高さは各物質の濃度の大きさを表す

大きくなり、P はまた S の合成も促進するため [S] も X で高まる。P と S の拡散速度は S の方が速いため、X にて [P] は鋭いピークを示すのに対して [S] はややなだらかで左右に広がった山状の盛り上がりを見せる。よって、X 付近で S の抑制効果により [P] は低下し、[P] の濃淡の波が生じる。

チューリング・パターンは安定した物質濃度の波によって形成されるが、前述のチューリングのモデルにおいて「P は S より拡散しにくい」と仮定したところを逆に「P は S より拡散しやすい」とすると、物質濃度の移動波が生じるようになる (Fig. 2)。ここで P と S の拡散速度を  $D_p$ 、 $D_s$  とすると、 $D_p < D_s$  のときは抑制物質の拡散性が高い為に [P] のピークは移動しにくい (Fig. 2b) が、 $D_p > D_s$  のときは P の拡散性が高い為に [P] のピークが [S] の低い方へ移っていく (Fig. 2a)。この移動波の様子は BZ 反応 (Belousov-Zhabotinsky reaction) と呼ばれるカルボン酸のプロモ化反応や、細胞性粘菌の集合時に発生する誘引物質 cAMP の波で観察することができる。

3. チューリング・パターンによる生物の模様

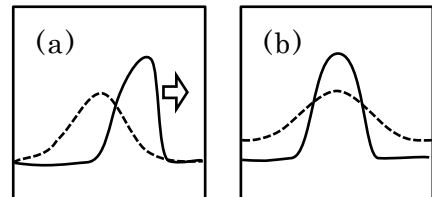


Fig. 2: (a)  $D_p > D_s$  の場合，  
(b)  $D_p < D_s$  の場合

チューリング・パターンには、各々の物質がその周辺で独立に振舞いあった結果として秩序だった構造が生み出され、無秩序な状態から自発的にパターンが形成される自己組織化の特徴や、2物質の相互作用の効果や拡散速度を微妙に変化させることで多種多様なパターンを形成できるという特徴がある。多くの生物

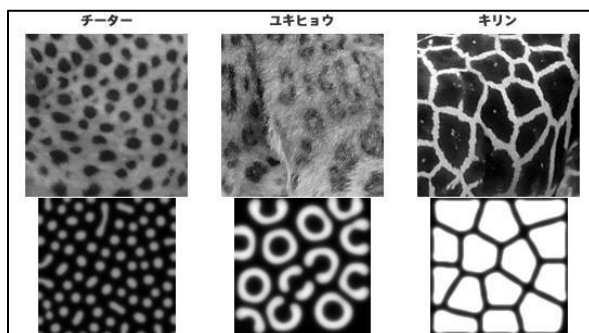


Fig. 3: 数種の哺乳類の模様(上)とそれに類似したチューリング・パターン(下)[1]

でこれらの特徴を持つチューリング・パターンに従って模様が形成されていると考えることは、「近縁な生物種間、及び個体間でも異なる模様が観察されること」や「遠縁な生物種間でも似た模様が観察されること」を考慮すると合理性が高い。また、様々な生物の模様をチューリング・パターンで再現することが可能である(Fig. 3)。

このことに目を付けた大阪大学大学院生命機能研究科教授の近藤滋先生はタテジマキンチャクダイ *Pomacanthus imperator* の縞模様に注目して研究し、体表の縞模様が成長に伴ってチューリング・パターンのシミュレーション通りに変化することを発見し、論文を提出した(Fig. 4a)。さらに近藤先生はゼブラフィッシュ *Danio rerio* にレーザーを照射して一部の色素細胞を死滅させ、どのように縞模様が再生するかを観察し、コンピューターシミュレーションと類似した再生過程が見られることを発見した(Fig. 4b)。これらの結果などから今日では、少なくとも魚類の模様はチューリング・パターンであることが広く認められている。

#### 4. チューリング・パターンの再現実験

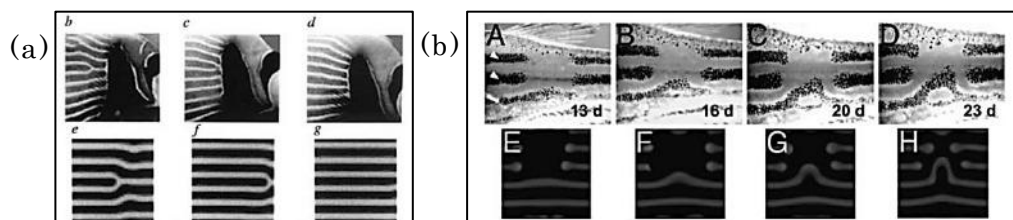


Fig. 4: (a)タテジマキンチャクダイの模様変化[2](b)レーザー照射後のゼブラフィッシュの模様変化[3], いずれも上段が実際の模様で下段がシミュレーション結果

チューリング・パターンは連立偏微分方程式を用いて記述されるが、理論で仮定されていることや理論の概略は理解しやすい為、自分で簡単なプログラムを書いてそのようなパターンを生成することは出来ないだろうかと考えた。私はチューリング・パターンの物質の挙動を単純化した離散的モデルを考案し、自作のプログラムを用いてチューリング・パターンの再現を試みた。

実験では、テキストファイルに□または■から構成される N 文字 N 行のテキストを出力する簡単なプログラムを作成し、□と■からなるモザイク画でのパターンの再現を試みた。今回のモデルにおける主な設定を以下に示す。

- (1) 体表の組織を  $N \times N$  のマスとみなし、各マスでの促進物質 P と抑制物質 S の濃度を考える
- (2)  $N \times N$  の各マスに対して P 濃度指数 "Pc" を定義し、Pc は [P] (=P の濃度) が低い時に 0、高い時に 1 の値をとるものとする。同様に S 濃度指数 "Sc" を各マスに対して定義する
- (3) ある瞬間  $T_0$  の 0 秒後において、すべてのマスで  $S_c = 0$  とし、Pc に関しては 1 にするマスと 0 にするマスについて、疑似乱数を用いてランダムに設定する(確率  $1/r$  で  $P_c = 1$ )。
- (4)  $T_0$  の 0 秒後から 1 秒ごとに  $N \times N$  の各マスの  $P_c, S_c$  が(5)(6)に従って更新される
- (5)  $N \times N$  の各マスについて、 $T_0$  から  $t+1$  秒後( $t = 0, 1, 2, \dots$ )の  $P_c$  の値は次のように決める  
★マス m の  $T_0$  から  $t+1$  秒後の  $P_c$  の値は、 $P_{ac} \times \{m$  を中心とする  $(2k_1+1) \times (2k_1+1)$  マスのうち、 $T_0$  から  $t$  秒後に  $P_c = 1$  を満たすマスの数}  $- P_{in} \times \{m$  を中心とする  $(2k_2+1) \times (2k_2+1)$  マスのうち、 $T_0$  から  $t$  秒後に  $S_c = 1$  を満たすマスの数}  $> A$  の時に 1、そうでないとき 0 とする(但し  $P_{ac}, P_{in}, k_1, k_2, A$  は定数でいずれも正の整数、 $k_1 < k_2$  とする)
- (6)  $N \times N$  の各マスについて、 $T_0$  から  $t+1$  秒後( $t = 0, 1, 2, \dots$ )の  $S_c$  の値は次のように決める  
★マス m の  $T_0$  から  $t+1$  秒後の  $S_c$  の値は、 $S_{ac} \times \{m$  を中心とする  $(2k_1+1) \times (2k_1+1)$  マスのうち、 $T_0$  から  $t$  秒後に  $P_c = 1$  を満たすマスの数}  $> B$  の時に 1、そうでないとき 0 とする(但し  $S_{ac}, B$  は定数でいずれも正の整数とする)
- (7)  $P_c = 1$  のマスを■、 $P_c = 0$  のマスを□として出力する

N の値は 60 で固定して、 $T_0$  から 0 秒後の  $P_c$  値の分布や  $P_{ac}, P_{in}, S_{ac}$ ,

$k_1, k_2, A, B$  の値を少しずつ変えることで、 $T_0$  から 50 秒後の時点でどのようなパターンが現れるかを探った。作成した Ruby コードは「8. 今回作成したプログラム」にてリンクを公開している。

## 5. 実験結果

様々なパターンが見られたが、そのうちいくつかの生成パターンとその数値設定の組み合わせを以下に示す(Fig. 5)。

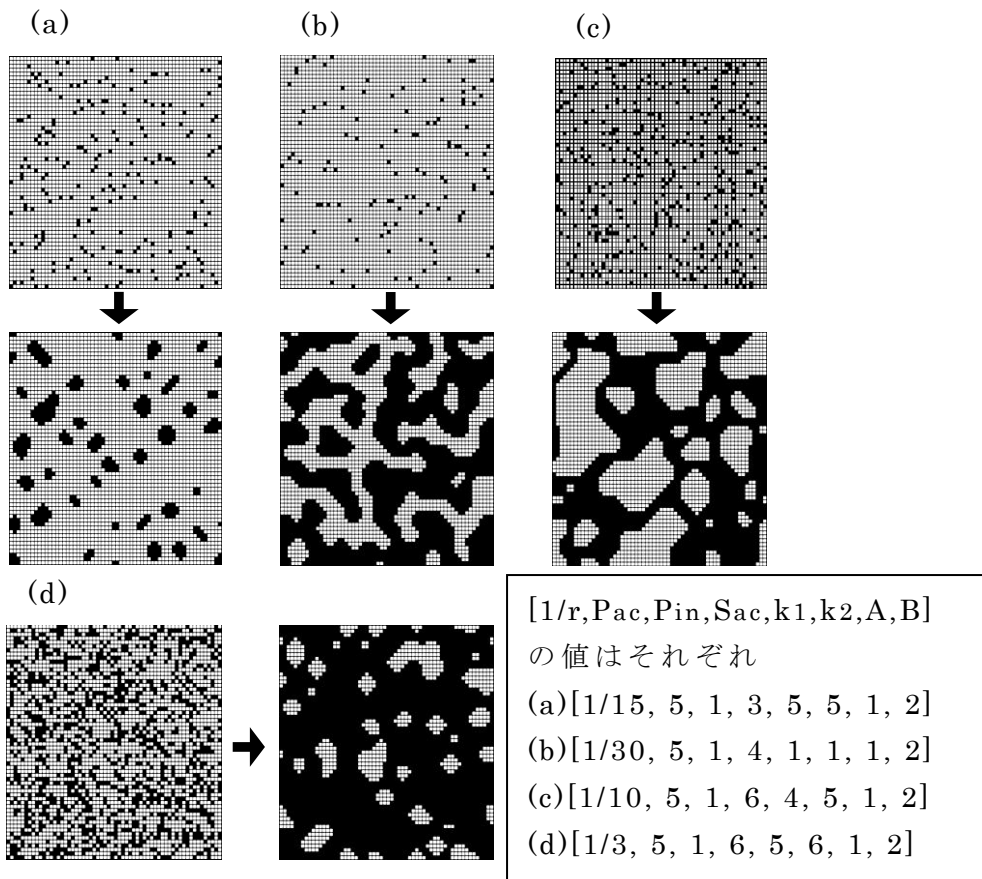


Fig. 5: (a)~(d)異なる数値設定の下でシミュレートした結果、矢印は初期パターン( $T_0$  から 0 秒後)から最終パターン( $T_0$  から 50 秒後)への移り変わりを示す

## 6. 考察

Fig. 5 に示すように、今回考案したモデルでも無秩序な状態から安定したパターンへと変化させることができた。かなり早めの段階で既に最終パターンにとよく似たパターンを示す場合が多かったが、中にはパターンの収束が遅いものもあった。Fig. 5 中では(d)の収束が 1 番遅かったように見られた。(a)はダルメシアン柄、(b)は真鱈の模様に見えなくも

ないだろう。

しかし、これら以上に秩序だったパターンは今回の試行では現れなかった。定数の値を正の整数に限ったこと、実際に試した定数の値のバリエーションが少なかったこと、また N の値が小さいことやそもそもモデルが単純化されていることなどが原因として考えられる。定数の値の組み合わせによっては、1つの定数の値を1増やすと全てのマスが真っ黒に、1減らすと真っ白になるといったデリケートな場合もあった。

## 7. おわりに

今回の試行では単純なプログラムを動かしたが、それにも関わらず最終的にはしっかりと安定したパターンをとっていたことは興味深かった。またこれを機に、同様にシンプルな数式で表される他の生命現象に対する興味が増した。機会があればより厳密なチューリング・パターンの再現に挑戦してみたいと思う。

## 8. 今回作成したプログラム

<https://github.com/tetanura/Turing/blob/main/Turing>

## 9. 画像出典, 参考文献

[1]”いま注目の最先端研究・技術探検！ 第15回”, 生命科学 DOKIDOKI 研究室, 公益財団法人 テルモ生命科学振興財団,

<https://www.terumozaidan.or.jp/labo/technology/15/index.html>,  
2021-1-10 最終閲覧.

[2] Kondo, S., Asai, R. A reaction-diffusion wave on the skin of the marine angelfish *Pomacanthus*. *Nature* **376**, 765-768 (1995).

<https://doi.org/10.1038/376765a0>.

[3] Yamaguchi, Motoomi et al. “Pattern regulation in the stripe of zebrafish suggests an underlying dynamic and autonomous mechanism.” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* vol. 104,12 (2007): 4790-3.

<https://doi:10.1073/pnas.0607790104>.

・Newton 2010年3月号, 「シマウマの模様はなぜできる? -- 『生物の模様』と『数学』の意外な関係」, ニュートンプレス.

・近藤滋, 「《講義1》生物のパターン形成と振動現象」, 計測と制御 第43巻 2004年8月号, 公益社団法人計測自動制御学会.